UNIDADE

3

Rendas ou série de pagamentos ou recebimentos

Objetivo

Nesta Unidade, você será levado a: enunciar e diferenciar os diversos tipos de renda; calcular e aplicar o valor presente e o valor futuro de uma renda imediata, bem como calcular o valor presente e o montante de uma renda antecipada; interpretar uma renda diferida e calcular o seu valor presente; identificar uma renda perpétua e calcular o seu valor presente, e também praticar o cálculo do valor presente de uma renda variável; e aplicar a equivalência de fluxos de caixa.

Rendas ou série de pagamentos ou recebimentos

Caro estudante!

Nas Unidades 1 e 2, foram analisados e estudados tipos de operação financeira, em que um capital era aplicado para formação de um montante, ou uma dívida era saldada em pagamento único, e realizamos operações financeiras de descontos de títulos. A Unidade 3 vai tratar dessas operações financeiras que envolvem um conjunto de capitais disponíveis em datas diferentes.

Leia com atenção e realize as atividades que estão indicadas ao longo da Unidade. Sua leitura, a realização das atividades, e os contatos com o tutor e o professor têm um só objetivo: ajudá-lo no processo de construção do conhecimento e no desenvolvimento de habilidades que caracterizarão seu novo perfil profissional ao final do curso. E então, o que está esperando? Vamos juntos na busca de mais conhecimento.

O objetivo de constituir um capital em uma data futura leva ao processo de **capitalização**. Caso contrário, quando queremos pagar uma dívida, temos um processo de **amortização**.

Pode ocorrer também o caso em que tenhamos pagamento pelo uso, sem que tenhamos amortização: é o caso dos aluguéis.

Estas situações caracterizam a existência de rendas ou série de pagamentos ou de recebimentos, o que nos leva às seguintes definições:

- **rendas certas ou determinísticas**: são aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. As rendas certas são estudadas pela Matemática Financeira;

- chamamos de rendas, de série de pagamentos ou recebimentos, série de prestações ou anuidades toda seqüência finita ou infinita de **pagamentos** ou **recebimentos** em datas previamente estipuladas;
- cada um destes pagamentos ou recebimentos, referidos a uma mesma taxa de juros compostos, será chamado de **termo da série** ou **termo da anuidade**;
- o intervalo de tempo entre dois termos chama-se **período**, e a soma dos períodos define a **duração** da série de pagamentos ou anuidades;
- o valor atual ou valor presente de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos valores atuais dos seus termos, soma esta realizada para uma mesma data e à mesma taxa de juros compostos; e
- analogamente, o montante ou valor futuro de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos montantes ou valores futuros de seus termos, consideradas uma dada taxa de juros compostos e uma data.

Classificação das rendas ou séries de pagamentos

Quanto ao número de termos, as rendas ou séries de pagamento podem ser classificadas em: finita ou infinita, conforme segue:

- **finita**: quando existir a última prestação; e
- **infinita ou perpétua**: quando não existir a última prestação.

Quanto à natureza de seus termos podem ser classificadas em: uniforme ou não uniforme, conforme segue:

- **uniforme**: quando todos os termos forem iguais; e
- **não uniforme ou variável**: quando os termos forem diferentes.

Quanto ao intervalo entre seus termos, podem ser classificadas em: periódica ou não periódica. Veja:

- **periódica**: quando o intervalo entre dois termos sucessivos for constante; e
- **não-periódica**: quando o intervalo entre dois termos sucessivos não for constante.

Quanto à forma de pagamento ou recebimento, podem ser classificadas em: imediatas ou diferidas. Veja:

- **imediatas**: quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.
  - **postecipadas ou vencidas**: quando os termos ocorrerem ao final de cada período; e
  - **antecipada**: quando os termos ocorrerem no início de cada período;
- **diferidas**: se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período, e a este prazo damos o nome de prazo de diferimento ou prazo de carência.
  - **postecipadas ou vencidas**: se os termos são exigíveis no fim dos períodos; e
  - **antecipadas**: se os termos são exigíveis no início dos períodos.

Cálculo do valor presente de uma renda imediata

Seja um capital *PV* a ser pago em *n* termos iguais *PMT*, imediatos postecipados e periódicos. Seja também uma taxa de juros *i*, referida ao mesmo período dos termos, conforme fluxo de caixa a seguir, para a amortização (Figura 6):
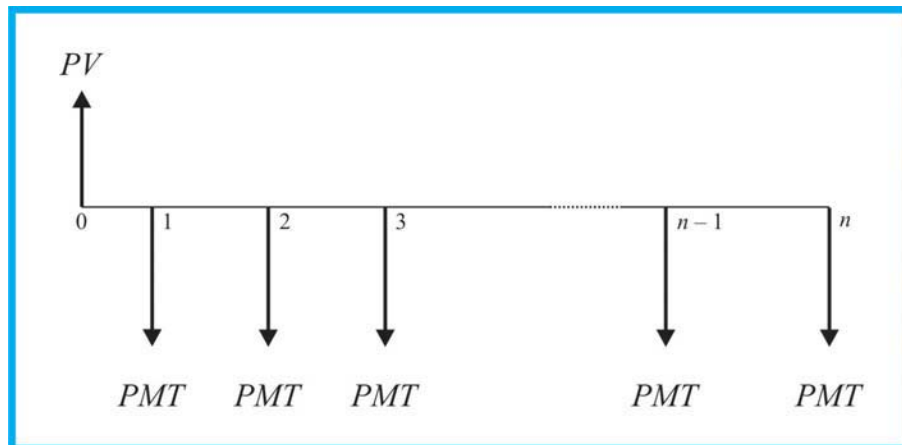
Figura 6

É fácil verificar que o valor presente PV de uma renda imediata, de n termos PMT, a uma taxa i, dada no mesmo período dos termos, é dado pela fórmula $PV = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, onde:

$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ é o fator de valor presente de uma renda imediata de PMT para PV, que só depende de i e n.

Para calcular PMT, vem:

$PMT = PV \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ onde:

$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ é o fator de recuperação do capital de uma renda imediata de PV para PMT, que só depende de i e n.

Exemplo 3.1 A loja Barateira vende certo eletrodoméstico em seis prestações mensais iguais de R$ 81,43, sendo a primeira, paga 30 dias após a compra. A taxa de juros do crédito pessoal da loja é de 4,5% *am*.Qual o preço à vista dessa mercadoria?

Resolução: dados do problema: n = 6 meses; i = 4,5% *am* = 0,045 *am*; PMT = 81,43; PV = ?

A partir da fórmula do valor presente, tem-se:

$$PV = 81,43 \times \frac{1-(1+0,045)^{-6}}{0,045} = 81,43 \times \frac{1-(1,045)^{-6}}{0,045} =$$

$$PV = 81,43 \times \frac{1-0,76790}{0,045} = 81,43 \times \frac{0,23210}{0,045} = 81,43 \times 5,15778 =$$

PV = 420,00

Portanto, o preço à vista do eletrodoméstico é de R$ 420,00.

Para resolver o exemplo acima na HP 12C, você digita:

f *REG*
4.5 *i*
6 *n*
81.43 *CHS* *PMT* *PV*, aparecendo no visor 420,00.

Exemplo 3.2 Um televisor em cores custa R$ 2.500,00 à vista, mas pode ser financiado sem entrada em 18 prestações mensais iguais e sucessivas à taxa de juros de 3,5% *am*. Calcular o valor da prestação a ser paga pelo comprador.

Resolução: dados do problema: PV = 2.500; n = 18; i = 3,5% *am* = 0,035 *am*; PMT = ?

Aplicando a fórmula $PMT = PV \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, você tem:

$$PMT = 2.500 \times \frac{0,035}{1-(1,035)^{-18}} = \frac{2.500 \times 0,035}{1-(1,035)^{-18}} =$$

$$PMT = \frac{87,50}{1-0,53833} = \frac{87,50}{0,46164} = 189,54.$$

Portanto, o valor da prestação é R$ 189,54.

Para resolver o exemplo acima na HP 12C, você digita:

f *REG*
3.5 *i*
18 *n*
2500 *CHS* *PV* *PMT*, aparecendo no visor 189,54.

Exemplo 3.3 Um equipamento é vendido por R$ 15.000,00 à vista. Pode ser adquirido também em prestações mensais iguais e sucessivas de R$ 885,71, a juros de 3% *am*. Sabendo-se que as prestações vencem 30 dias após a compra, calcular o número de prestações.

GLOSSÁRIO

** Logaritmo neperiano* – nome atribuído em homenagem a seu inventor, John Naper, conhecido ainda por logaritmo natural, representa o expoente a que se deve elevar o número e, que é um número irracional que vale aproximadamente 2,71828, para se obter outro número. Fonte: Ferreira (2004)

Resolução: dados do problema: PV = 15.000; PMT = 885,71; i = 3% am = 0,03 am; n = ?

Usando a fórmula $PV = PMT \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos:

$$15.000 = 885,71 \times \frac{1-(1,03)^{-n}}{0,03} \Rightarrow 1-(1,03)^{-n} = \frac{15.000 \times 0,03}{885,71} = 0,50807$$

$(1,03)^{-n}$ = 1 – 0,50807 = 0,49199, ou seja, $(1,03)^{-n}$ = 0,49199. Aplicando **logaritmo neperiano*** (ln) em ambos membros de $(1,03)^{-n}$ = 0,49199, você tem:

$$(1,03)^{-n} = \ln(0,49199)$$

e usando a propriedade da potência de logaritmo $\ln A^n = n \mathrm{x} \ln A$, vem:

$$-n \ln(1,03) = \ln(0,49199) \Rightarrow n = -\frac{\ln(0,49199)}{\ln(1,03)} = 24.$$

Portanto, o número de prestações é 24.

Para resolver o exemplo acima na HP 12C, você digita:

f *REG*
3 *i*
15000 *CHS* *PV*
885.71 *PMT* *n*, aparecendo no visor 24.

Exemplo 3.4 Um equipamento industrial é vendido por R$ 20.000,00 à vista, ou em 12 prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 1.949,74. Determinar a taxa de juros mensal que está sendo cobrada.

Resolução: dados do problema: PV = 20.000; PMT = 1.949,74; i = ?; n = 12 meses.

Substituindo esses valores na fórmula $PV = PMT \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, você tem:

$$20.000 = 1.949,74 \times \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} = \frac{20.000}{1.949,74} = 10,25778.$$

O problema agora consiste em calcular o valor de i; a sua obtenção é feita por tentativa e erro, mas isto está fora de nossos planos.

Resolveremos este problema com o auxílio da HP 12C; para isso, digite:

f *REG*
20000 *CHS* *PV*
12 *n*
1949.74 *PMT* *i*, aparecendo no visor 2,5.

Portanto, a taxa de juros que está sendo cobrada é 2,5% *am*.

Exemplo 3.5 A Companhia Metalúrgica Liga Leve mantém uma pendência com o governo federal relativa ao não recolhimento de imposto de renda dos últimos dois anos. O total da dívida, já com os juros e multas inclusos, é de R$ 2.540.000,00. Por se tratar de um valor elevado, impossível de ser pago em uma única oportunidade, e ficou definido com a Secretaria da Receita Federal um parcelamento em quatro anos, com pagamentos mensais. A taxa de juros cobrada é de 1% ao mês. Calcular o valor de cada parcela.

Resolução: dados do problema: PV = 2.540.000; n = 4 anos = 48 meses; i = 1% *am* = 0,01 *am*; PMT = ?

Aplicando a fórmula $PV = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos:

$$PMT = 2.540.000 \times \frac{0{,}01}{1-(1+0{,}01)^{-48}} = 2.540.000 \times \frac{0{,}01}{1-(1{,}01)^{-48}} =$$

$$PMT = \frac{25.400}{1-0{,}62026} = 66.887{,}94.$$

Portanto, o valor de cada parcela mensal a ser desembolsada pela Liga Leve é de R$ 66.887,94.

Exemplo 3.6 Um apartamento foi adquirido com uma entrada de R$ 30.000,00, mais 48 prestações mensais imediatas de R$ 3.339,69. Qual o preço à vista do apartamento, se a taxa do mercado imobiliário é 1,25% *am*?

Resolução: dados do problema: Entrada = 30.000; Parte financiada: PMT = 3.339,69; n = 48 meses; i = 1,25% *am* = 0,0125 *am*; PV = ?

Para calcular o valor presente da parte financiada, aplicando a fórmula acima, você tem:

$$PV = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 3.339,69 \times \frac{1-(1+0,0125)^{-48}}{0,0125} =$$

$$PV = 3.339,69 \times \frac{1-(1,0125)^{-48}}{0,0125} = 3.339,69 \times \frac{1-0,55086}{0,0125} =$$

$$PV = 3.339,69 \times \frac{0,44914}{0,0125} = 120.000,00.$$

O preço à vista é igual à entrada mais a parte financiada, ou seja:

Preço à vista = 30.000,00 + 120.000,00 = 150.000,00.

Portanto, o preço à vista do apartamento é R$ 150.000,00.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f *REG*

3339.69 *CHS* *PMT*

1.25 *i*

48 *n*

PV , aparecendo no visor 120.000,00

30000 +, aparecendo no visor 150.000,00.

Vamos verificar se você está acompanhando a explicação! Faça as atividades propostas e, caso tenha dúvidas, leia novamente com maior atenção os conceitos e resultados ainda não entendidos, e na seqüência resolva as atividades com auxílio de seu tutor.

Atividades de aprendizagem – 1

1) Um empréstimo será liquidado em 12 prestações de R$ 135,78 todo final de mês. Se a taxa de juros é de 2,5% *am*, determinar o valor do empréstimo.

2) Uma mercadoria, à vista, custa R$ 4.500,00, podendo ser adquirida em nove prestações mensais, sendo a primeira paga um mês após a compra à taxa de 4,5% *am*. Calcular o valor de cada prestação.

3) Certa empresa pretende comprar um equipamento cujo preço à vista é de R$ 10.000,00. A empresa vendedora exige 10% sobre o preço à vista como entrada e financia o restante à taxa de juros compostos de 6% *am*. A empresa compradora dispõe para pagar, mensalmente, da quantia de R$ 747,41. Nessas condições, calcular o número de prestações.

4) Um empréstimo de R$ 20.000,00 deve ser liquidado mediante o pagamento de 24 prestações mensais, iguais e sucessivas. Determinar o valor dessas prestações, sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 24% *aa*, capitalizados mensalmente, e que a primeira prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.

5) Um aparelho de som custa R$3.500,00 à vista e será vendido em 18 prestações mensais iguais de R$ 249,98, sendo a primeira paga um mês após a compra. Determinar a taxa de juros mensal cobrada na operação.

6) Um terreno foi comprado com uma entrada de R$ 60.000,00 e 36 prestações mensais imediatas de R$ 3.813,19. Determine o preço à vista do terreno, se a taxa do mercado imobiliário é 1,25% *am*.

7) Um cliente de uma agência de automóveis adquiriu um veículo financiado em 24 prestações de R$ 1.500,00, com uma taxa de juros de 1% ao mês, no regime de juros compostos. No final de um ano, esse cliente procurou a mesma agência para vender este automóvel, e a agência lhe ofereceu R$ 18.000,00 para pagamento à vista. Determinar a parcela que deve ser paga ao cliente para que a agência adquira esse veículo assumindo o restante do financiamento, com a mesma taxa de 1% ao mês.

Cálculo do montante de uma renda imediata

Em um processo de capitalização, são aplicadas n parcelas iguais a PMT, periódicas e postecipadas, a uma taxa de juros i, referida ao mesmo período dos termos. O problema é determinar o montante (FV) na data focal n, que resulta deste processo de capitalização, conforme o fluxo de caixa da Figura 7.
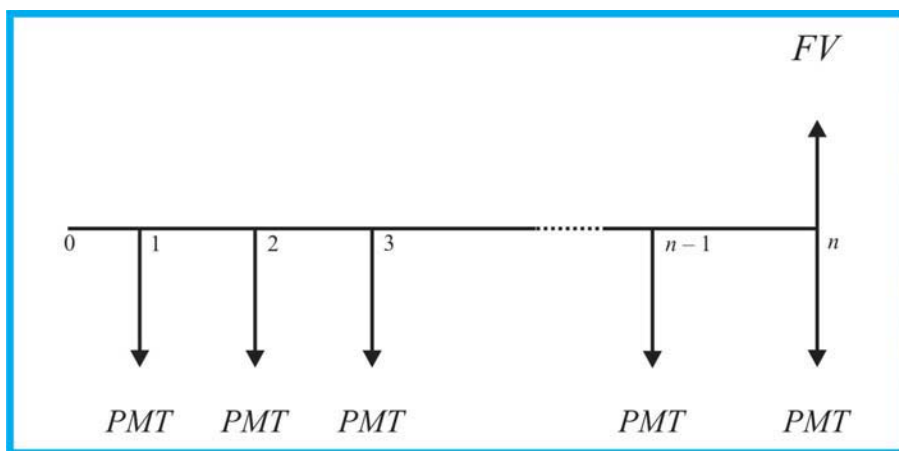
Figura 7

O valor futuro ou o montante (FV) é o resultado da soma dos montantes de cada um dos termos (PMT), à taxa de juros i, na data focal n e dado pela fórmula:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

onde:

$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é o fator de acumulação de capital de uma renda imediata de PMT para FV, que só depende de i e n.

Para calcular PMT, vem:

$$PMT = FV \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

onde:

$\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é o fator de formação do capital de uma renda imediata de FV para PMT, que só depende de i e n.

Exemplo 3.7 A Locadora de Veículos Sempre Alerta estuda a renovação de sua frota de carros de aluguel. O sr. Reinoldo, diretor comercial da empresa, avalia uma proposta de leasing do Banco da Lavoura, que oferece uma operação nos seguintes termos:

- valor da prestação do leasing = R$ 695,00;
- número de parcelas = 24; e
- valor residual =nulo.

O sr. Reinoldo está na dúvida em realizar a operação neste momento, final do primeiro trimestre, pois os 40 carros que ele pretende substituir estão com apenas oito meses e cerca de 24.000 km em média. Ele poderia aguardar por mais seis meses, pois o valor de renda pouco seria afetado, e o valor das parcelas poderia ser aplicado. Atualmente, ele consegue uma taxa de 0,85% *aa* mês. Calcular de quanto será possível dispor, ao final de seis meses, caso a troca seja adiada.

Resolução: dados do problema: $PMT = 695{,}00$; $n = 6$ meses; $i = 0{,}85\%\ am = 0{,}0085\ am$; $FV = ?$

Aplicando a fórmula do montante acima, vem:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow FV = 695{,}00 \times \frac{(1+0{,}0085)^6 - 1}{0{,}0085} =$$

$$FV = 695{,}00 \times \frac{0{,}0521}{0{,}0085} = 4.259{,}62.$$

Portanto, para 40 veículos teremos R$ 170.384,93.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f *REG*
695 *CHS* *PMT*
0.85 *i*
6 *n*
FV, aparecendo no visor 4.259,62
40 ×, aparecendo no visor 170.384,93.

Exemplo 3.8 A Administradora de Condomínios Pousada Feliz é uma das maiores do País. Ela trabalha principalmente com condomínios de alto padrão. Um deles é o Gamaville, que pretende construir uma sede campestre. Os condôminos, cerca de 600, deverão dispor de

uma quantia, mensalmente, durante dois anos, que será empregada na realização do empreendimento. Os valores pagos serão depositados em uma conta de poupança que rende cerca de 0,5% ao mês. Sabendo-se que **anualmente** deverão ser arrecadados cerca de R$ 225.000,00, calcule o valor da contribuição mensal de cada condômino.

Resolução: dados do problema: FV = 225.000; n = 12 meses; i = 0,5% *am* = 0,005 *am*; PMT = ?

Pela fórmula $PMT = FV \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$, vem:

$$PMT = FV \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow PMT = 225.000 \times \frac{0{,}005}{(1+0{,}005)^{12} - 1} =$$

PMT = 225.000 x 0,08107 = 18.239,95

Portanto, o valor de arrecadação mensal necessário é de R$ 18.239,95. Como são 600 condôminos, cada um deverá pagar, mensalmente, o valor de R$ 30,40.

Exemplo 3.9 Um investidor aplica mensalmente R$ 1.243,57 em uma instituição financeira, gerando um montante no valor de R$ 9.500,00 na data do último depósito. Sabendo-se que a taxa contratada é de 2,9% *am* e que o primeiro depósito é feito um mês após a data da operação, calcular o número de depósitos mensais.

Resolução: dados do problema: PMT = 1.243,57; i = 2,9% *am* = 0,029 *am*; FV = 9.500 n = ?

Usando a fórmula $FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, vem:

$$9.500 = 1.243{,}57 \times \frac{(1{,}029)^n - 1}{0{,}029} \Rightarrow (1{,}029)^n - 1 = \frac{9.500 \times 0{,}029}{1.243{,}57} = 0{,}22154 =$$

$(1{,}029)^n = 1 + 0{,}22154$, ou $(1{,}029)^n = 1{,}22154$.

Aplicando ln na equação $(1{,}029)^n = 1{,}22154$, resulta:

$1n(1{,}029)^n = 1n(1{,}22154)$.

Agora, aplicando a propriedade da potência de logaritmo, você tem:

$$n \ln(1{,}029) = \ln(1{,}22154) \Rightarrow n = \frac{\ln(1{,}22154)}{\ln(1{,}029)} = 7$$

Portanto, o número de depósitos mensais é sete.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f *REG*
1243.57 *CHS* *PMT*
2.9 *i*
9500 *FV* *n*, aparecendo no visor 7

Exemplo 3.10 O sr. Boa Vida aplicou em um título de renda fixa, efetuando 18 depósitos mensais iguais no valor de R$ 235,48 e gerando um montante de R$ 5.415,22 ao final do último depósito. Determinar a taxa de juros mensal ganha pelo sr. Boa Vida.

Resolução: dados do problema: $FV = 5.415,22$; $PMT = 235,48$; $n = 18$ meses; $i = ?$

Aplicando a fórmula $FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, vem:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow 5.415,22 = 235,48 \times \frac{(1+i)^{18} - 1}{i} \Rightarrow$$

$$\frac{(1+i)^{18} - 1}{i} = \frac{5.415,22}{235,48} = 22,99652.$$

O problema agora consiste em calcular o valor de i; a sua obtenção é feita por tentativa e erro, mas isto está fora de nossos planos. Resolveremos este problema com o auxílio da HP 12C; e, para isso, digite:

f *REG*
5415.22 *CHS* *FV*
18 *n*
235.48 *PMT* *i*, aparecendo no visor 2,8.

Portanto, a taxa de juros ganha pelo sr. Boa Vida é 2,8% *am*.

Verifique seu aprendizado resolvendo as atividades propostas a seguir.

Atividades de aprendizagem – 2

1) O sr. Justino deposita mensalmente R$ 450,00 no Banco Alegria. Sabendo-se que a taxa de juros da aplicação é de 1,12% *am*, quanto possuirá ao final de dois anos?

2) Certa pessoa deseja comprar um carro por R$ 25.000,00 à vista daqui a 18 meses. Admitindo-se que ela vá poupar certa quantia mensal que será aplicada em título de renda fixa rendendo 2,15% *am* de juros compostos, determinar quanto deve ser poupado mensalmente.

3) Um investidor aplica mensalmente R$ 1.243,57 em uma instituição financeira, gerando um montante no valor de R$ 9.500,00 na data do último depósito. Sabendo-se que a taxa contratada é de 2,9% *am* e que o primeiro depósito é feito um mês após a data da operação, calcular o número de depósitos mensais.

4) Quanto uma pessoa deve depositar mensalmente, durante 18 meses, em um fundo de investimento que rende 1,5% *am*, para que, no instante do último depósito, tenha um montante de R$ 30.000,00?

5) O sr. Natanael Bom de Bico está programando uma viagem para o exterior e para isso necessita levar R$ 25.000,00 para daqui a dois anos. Admitindo que ele vai poupar certa quantia mensal aplicando em um título de renda fixa rendendo 1,95 % *am*; determinar quanto o sr. Natanael Bom de Bico deve poupar mensalmente.

6) Uma pessoa depositou mensalmente R$ 350,00 numa poupança programada no banco Alvorada; e, no momento do décimo quinto depósito, seu saldo era de R$ 6.118,72. Determinar a taxa de juros mensal paga pelo Banco Alvorada.

Cálculo do valor presente e do montante de uma renda antecipada

Seja um capital PV que será pago em n prestações iguais a PMT, antecipadas, imediatas e periódicas, a uma taxa de juros i; então, o valor presente (PV) é dado pela fórmula:

$$PV = PMT \times (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Seja um processo de capitalização em que são depositadas n parcelas iguais a PMT, antecipada, imediata e periódica, a uma taxa de juros i; então, o montante (FV) é dado pela fórmula:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Exemplo 3.11 Uma bicicleta foi vendida em nove prestações mensais iguais no valor de R$ 94,59, sendo a primeira paga no momento da compra. Se a taxa de juros é de 23,75% *aa*, determinar o preço à vista da bicicleta.

Resolução: dados do problema: i = 23,75% *aa* = 0,2375 *aa*; n = 9 meses; PMT = 94,59; PV = ?

Vamos calcular primeiro a taxa equivalente ao mês.

$i_m = (1{,}2375)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}01791$, ou seja, i = 1,791% *am*.

Aplicando a fórmula $PV = PMT \times (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, tem-se:

$$PV = PMT \times (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow PV = 94{,}59 \times (1+0{,}01791) \times \frac{1-(1+0{,}01791)^{-9}}{0{,}01791}$$

$$PV = 94{,}59 \times (1{,}01791) \times \frac{1-(1{,}01791)^{-9}}{0{,}01791} \Rightarrow PV = 94{,}59 \times (1{,}01791) \times \frac{1-0{,}85235}{0{,}01791}$$

$$PV = 94{,}59 \times (1{,}01791) \times \frac{0{,}14765}{0{,}01791} = 793{,}79.$$

Portanto, o preço à vista da bicicleta é R$ 793,79.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite

f *REG*
94.59 *CHS* *PMT*
23.75 *ENTER* 100 ÷ 1 + 12 1/*x* y^x 1 – 100 × *i*
9 *n*
g *BEG* (pelo fato de trabalharmos com rendas antecipadas)
PV , aparecendo no visor 793,79.

Observação 3.1. Para retirar *BEGIN* do visor da HP 12C, digite *g END*.

Exemplo 3.12 Quanto se deve depositar, a partir de hoje, no início de cada mês, em uma instituição financeira que paga 2,45% *am* para constituir um montante de R$ 5.300,00 ao final de dois anos?

Resolução: dados do problema: i = 2,45% *am* = 0,0245 *am*; n = 24 meses; FV = 5.300; PMT = ?

Aplicando a fórmula $FV = PMT \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, temos:

$$5.300 = PMT \times (1+0,0245) \times \frac{(1+0,0245)^{24} - 1}{0,0245} \Rightarrow$$

$$5.300 = PMT \times (1,0245) \times \frac{(1,0245)^{24} - 1}{0,0245} \Rightarrow$$

$$5.300 = PMT \times (1,0245) \times \frac{1,178767 - 1}{0,0245} \Rightarrow$$

$$5.300 = PMT \times 32,93742 \Rightarrow PMT = \frac{5.300}{32,93742} = 160,91.$$

Portanto, o valor a ser depositado mensalmente é R$ 160,91.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f *REG*
g *BEG*
5300 *CHS* *FV*
2.45 *i*
24 *n* *PMT*, aparecendo no visor 160,91.

Exemplo 3.13 Calcular o valor da prestação mensal antecipada capaz de amortizar, com 18 pagamentos mensais iguais, um financiamento no valor de R$ 5.800,00 a uma taxa de juros de 28,78% *aa*.

Resolução: dados do problema: i = 28,78% *aa* = 0,2878 *aa*; n = 18 meses; PV = 5.800; PMT = ?

Vamos calcular primeiro a taxa equivalente ao mês dada por:

$i_m = (1,2878)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0213$, ou seja, i = 2,13% *am*.

Agora, aplicando a fórmula $PV = PMT \times (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, vem:

$$5.800 = PMT \times (1+0,0213) \times \frac{1-(1+0,0213)^{-18}}{0,0213} \Rightarrow$$

$$5.800 = PMT \times (1,0213) \times \frac{1-(1,0213)^{-18}}{0,0213} \Rightarrow$$

$$5.800 = PMT \times (1,0213) \times \frac{1-0,6843}{0,0213} \Rightarrow$$

$$5.800 = PMT \times 15,1378 \Rightarrow PMT = \frac{5.800}{15,1378} = 383,15.$$

Portanto, o valor da prestação mensal antecipada é R$ 383,15.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f	*REG*	
g	*BEG*	
5800	*CHS*	*PV*
28.78	100 ÷ 1 + 12 1/*x* y^x 1 – 100 × *i*	
18	*n*	*PMT*, aparecendo no visor 383,15.

Exemplo 3.14 Calcular o montante, ao final de 18 meses, resultante da aplicação de 18 parcelas mensais e iguais no valor de R$ 789,86 à taxa de 1,15% *am*, sendo a primeira aplicação feita hoje.

Resolução: dados do problema: i = 1,15% *am* = 0,0115 *am*; n = 18 meses; PMT = 789,86; FV = ?

Aplicando a fórmula do montante para renda antecipada, você tem:

$$FV = PMT \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow$$

$$FV = 789,86 \times (1+0,0115) \times \frac{(1+0,0115)^{18} - 1}{0,0115}$$

$$FV = 789,86 \times (1,0115) \times \frac{(1,0115)^{18} - 1}{0,0115} = 798,94 \times \frac{1,22853 - 1}{0,0115} = 15.876,78.$$

Portanto, o montante ao final de 18 meses é R$ 15.876,78.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f	*REG*	
g	*BEG*	
789.86	*CHS*	*PMT*
1.15	*i*	
18	*n*	*FV*, aparecendo no visor 15.876,78.

Exemplo 3.15 Quanto se deve depositar, a partir de hoje, no início de cada mês, em uma instituição financeira que paga 1,45% *am* para constituir um montante de R$ 5.300,00 ao final de 24 meses?

Resolução: dados do problema: i = 1,45% *am* = 0,0145 *am*; n = 24 meses; FV = 5.300; PMT = ?

Substituindo os valores dados na fórmula

$FV = PMT \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, vem:

$$5.300 = PMT \times (1+0,0145) \times \frac{(1+0,0145)^{24} - 1}{0,0145} \Rightarrow$$

$$5.300 = PMT \times (1,0145) \times \frac{(1,0145)^{24} - 1}{0,0145} \Rightarrow 5.300 = PMT \times 28,87461 \Rightarrow$$

$$PMT = \frac{5.300}{28,87461} = 183,55.$$

Portanto, se deve depositar, a partir de hoje, R$ 183,55.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f	*REG*	
g	*BEG*	
5300	*CHS*	*FV*
1.45	*i*	
24	*n*	*PMT*, aparecendo no visor 183,55.

Exemplo 3.16 Quantas aplicações mensais de R$ 1.000,00 são necessárias para obter um montante no valor de R$ 33.426,47, sabendo-se que a taxa de juros é de 3% *am*, que a primeira aplicação é feita hoje, e a última, 30 dias antes do resgate daquele valor?

Resolução: dados do problema: i = 3% *am* = 0,03 *am*; PMT = 1.000; FV = 33.426,47; n = ?

Usando diretamente a fórmula $FV = PMT \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, você tem:

$$33.426,47 = 1.000 \times (1 + 0,03) \times \frac{(1+0,03)^n - 1}{0,03} \Rightarrow$$

$$33.426,47 = 1.000 \times (1,03) \times \frac{(1,03)^n - 1}{0,03} \Rightarrow$$

$$33.426,47 = 1.030 \times \frac{(1,03)^n - 1}{0,03} \Rightarrow$$

$$(1,03)^n - 1 = \frac{1.002,79}{1.030} = 0,97358 \Rightarrow (1,03)^n = 0,97358 + 1 = 1,97358$$

ou seja, $(1,03)^n$ = 1,97358. Agora, aplicando ln a ambos membros da igualdade, vem $(1,03)^n$ = 1,97358, temos:

$1n(1,03)^n$ = $1n(1,97358)$, e a propriedade da potência do logaritmo, resulta:

$$n \times \ln(1,03) = \ln(1,97358) \Rightarrow n = \frac{\ln(1,97358)}{\ln(1,03)} = 23.$$

Portanto, o número de aplicações mensais é 23.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f *REG*

g *BEG*

33426.47 *CHS* *FV*

3 *i*

1000 *PMT* *n*, aparecendo no visor 23.

Vamos verificar se você está entendendo os conceitos apresentados? Para saber, procure, então, resolver as atividades propostas a seguir. Caso tenha dúvidas, faça uma releitura cuidadosa dos conceitos ou resultados não entendidos.

Atividades de aprendizagem – 3

1) Uma mercadoria custa R$ 5.600,00 à vista, podendo ser vendida em nove prestações mensais iguais, à taxa de 3,45% *am*, sendo a primeira paga no ato da compra. Determinar o valor de cada prestação.

2) Uma pessoa deve pagar por um financiamento 18 prestações mensais antecipadas de R$ 358,47 cada uma. Determinar o valor financiado, se a taxa de juros cobrada na operação for de 2,75% *am*.

3) Quanto deverei aplicar mensalmente, à taxa de 1,5% *am*, para ter um montante de R$ 14.000,00 ao final do 24º mês, de acordo com o conceito de renda imediata postecipada e o conceito de renda antecipada?

4) Uma bicicleta foi vendida em 12 prestações mensais iguais no valor de R$ 182,19, sendo a primeira paga no momento da compra. Se a taxa de juros é de 3,75% *am*, qual o preço à vista da bicicleta?

5) Uma empresa deve pagar um título de R$ 60.000,00 daqui a um ano e meio. Quanto deverá investir mensalmente, a partir de hoje, se os depósitos forem iguais e remunerados a 1,75% *am*, para que, um mês após o último depósito, o saldo seja suficiente para pagar o título?

6) Calcular o montante, ao final de 36 meses, resultante da aplicação de 18 parcelas mensais e iguais no valor de R$ 489,86 à taxa de 1,85% *am*, sendo a primeira aplicação feita hoje.

7) Quantos depósitos mensais de R$ 450,00, aplicados a 2,35% *am* em uma poupança programada, serão necessários para que um mês após o último depósito se obtenha um saldo de R$ 7.531,85?

Cálculo do valor presente de uma renda diferida

Suponha-se uma renda de n termos PMT, diferida (carência) de m períodos, da qual queremos calcular o valor presente PV com taxa i dada para o período da renda.

Então, para uma renda diferida de m períodos, o valor presente é dado pela fórmula:

$$PV = PMT \times (1+i)^{-m} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Para calcular o valor das prestações (PMT), temos:

$$PMT = \frac{PV \times i \times (1+i)^{m}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Exemplo 3.17 Um consumidor adquire uma geladeira pelo sistema de crediário, para pagamento em nove prestações mensais iguais no valor de R$ 365,87. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada pela loja é de 4,5% *am* e a primeira prestação será paga daqui a 120 dias, calcular o valor financiado pelo consumidor.

Resolução: Dados do problema: i = 4,5% *am* = 0,045 *am*; PMT = 365,87; n = 9 meses; m = 3 (são 90 dias ou três meses de carência), PMT = ?

Aplicando diretamente a fórmula $PV = PMT \times (1+i)^{-m} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, você tem:

$$PV = 365{,}87 \times (1+0{,}045)^{-3} \times \frac{1-(1+0{,}045)^{-9}}{0{,}045} \Rightarrow$$

$$PV = 365{,}87 \times (1{,}045)^{-3} \times \frac{1-(1{,}045)^{-9}}{0{,}045} \Rightarrow$$

$$PV = 365{,}87 \times 0{,}8763 \times \frac{1-0{,}6729}{0{,}045} = 2.330{,}45.$$

Portanto, o valor financiado pelo consumidor é R$ 2.330,45.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f	*REG*		
365.87	*CHS*	*PMT*	
4.5	*i*		
9	*n*	*PV*, aparecendo no visor 2.659,43	
f	*FIN*	*CHS*	*FV*
4.5	*i*		
3	*n*	*PV*, aparecendo no visor 2.330,45.	

Exemplo 3.18 Resolver o exemplo anterior, considerando-se que a loja concedeu carência de quatro meses.

Resolução: dados do problema: i = 4,5% *am*; PMT = 365,87; n = 9 meses; m = 4; PV = ?

Aplicando a fórmula do valor presente para rendas diferidas, vem:

$$PV = PMT \times (1+i)^{-m} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \Rightarrow$$

$$PV = 365,87 \times (1+0,045)^{-4} \times \frac{1-(1+0,045)^{-9}}{0,045} \quad \Rightarrow$$

$$PV = 365,87 \times (1,045)^{-4} \times \frac{1-(1,045)^{-9}}{0,045} =$$

$$PV = 365,87 \times 0,8386 \times \frac{1-0,6729}{0,045} = 2.230,10.$$

Portanto, o valor financiado pelo cliente é R$ 2.230,10.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f	*REG*		
365.87	*CHS*	*PMT*	
4.5	*i*		
9	*n*	*PV*, aparecendo no visor 2.659,43	
f	*FIN*	*CHS*	*FV*
4.5	*i*		
4	*n*	*PV*, aparecendo no visor 2.230,10.	

Exemplo 3.19 Um empréstimo no valor de R$ 4.500,00 será amortizado em 12 prestações mensais iguais com quatro meses de carência. Se a taxa de juros contratada é de 1,75% *am*, calcular o valor das prestações mensais.

Resolução: dados do problema: i = 1,75% *am* = 0,0175 *am*; PV = 4.500; n = 12 meses; m = 4 meses; PMT = ?

Aplicando a fórmula $PMT = \frac{PV \times i \times (1+i)^m}{1-(1+i)^{-n}}$, vem:

$$PMT = \frac{4.500 \times 0,0175 \times (1+0,0175)^4}{1-(1+0,0175)^{-12}} \Rightarrow PMT = \frac{4.500 \times 0,0175 \times (1,0175)^4}{1-(1,0175)^{-12}}$$

$$PMT = \frac{78,75 \times 1,0719}{1-0,8121} = 449,12.$$

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f *REG*
4500 *CHS* *PV*
1.75 *i*
4 *n* *FV*, aparecendo no visor 4.823,37

f *FIN* *CHS* *PV*
1.75 *i*
12 *n* *PMT*, aparecendo no visor 449,12.

Cálculo do valor presente de uma renda perpétua

Suponhamos, agora, que a renda imediata é perpétua, isto é, tem um número infinito de termos PMT, e seu valor presente PV com uma taxa referida ao mesmo período dos termos da renda é dado pela fórmula:

$$PV = \frac{PV}{i}.$$

Exemplo 3.20 Uma pessoa quer comprar uma loja comercial em um shopping para viver com a renda do seu aluguel. Calcula que poderá ser alugada por R$ 2.000,00 mensais. Quanto estará disposta a pagar pela loja comercial, se a taxa de mercado está em torno de 1% *am*?

Resolução: dados do problema: $PMT = 2.000$; $i = 1\%$ *am* = 0,01 *am*; $PV = ?$

Pela fórmula dada acima, vem:

$$PV = \frac{PV}{i} \quad \Rightarrow \quad PV = \frac{2.000}{0,01} = 200.000,00.$$

Portanto, esta pessoa está disposta a pagar pela loja comercial R$ 200.000,00.

Exemplo 3.21 Quanto um investidor deverá aplicar hoje em uma caderneta de poupança que rende 0,5% *am* para ter uma renda perpétua mensal de R$ 4.500,0 atualizados pelo índice de correção da poupança? Considere a primeira retirada um mês após a aplicação.

Resolução: dados do problema: $PMT = 4.500$; $i = 0,5\%$ *am* = 0,005 *am*; $PV = ?$

Pela fórmula dada acima, vem:

$$PV = \frac{PV}{i} \quad \Rightarrow \quad PV = \frac{4.500}{0,005} = 900.000,00.$$

Portanto, o investidor deve aplicar hoje R$ 900.000,00.

Verifique o grau de compreensão dos conceitos apresentados resolvendo as atividades propostas a seguir. Caso encontre dificuldades, reveja os conceitos e seus respectivos exemplos. Se sentir necessidade, busque auxílio do seu tutor.

Atividades de aprendizagem – 4

1) Uma mercadoria que custa R$ 15.800,00 será paga em 15 prestações mensais iguais, sendo a primeira paga 13 meses após a compra (12 meses de carência), a uma taxa de 3,5% *am*. Determinar o valor de cada prestação.

2) Uma pessoa efetua dez depósitos mensais iguais de R$ 245,00. Se a taxa de juros da operação é de 1,75% *am*, quanto essa pessoa terá sete meses após o último depósito?

3) Determinar o preço à vista de uma televisão em cores vendida em 12 prestações mensais iguais de R$ 367,79 sem entrada, a primeira paga cinco meses após a compra, e a loja cobrando 4,75% *am* de juros.

4) O valor de um equipamento é de R$ 80.000,00. Como alternativa, o fornecedor aluga o equipamento por dois anos, sendo de R$ 3.000,00 o aluguel mensal no primeiro ano e de R$ 5.000,00 o aluguel mensal no segundo ano, vencendo o aluguel ao final de cada mês. O equipamento, ao término do contratado, é vendido ao cliente por seu valor residual. Qual é o valor residual do equipamento, se a taxa de juros da operação for de 2,5% *am*?

5) Um empréstimo de R$ 100.000,00 é realizado com uma taxa de juros de 10% *aa* e deve ser amortizado no prazo de dez anos, com os dois primeiros anos de carência.

Determinar o valor das oito prestações anuais, iguais e sucessivas que deverão ser pagas a partir do final do terceiro ano, nas seguintes hipóteses:

a) os juros devidos nos dois primeiros anos de carência são pagos ao final de cada ano;

b) os juros devidos nos dois primeiros anos de carência.

6) Uma residência foi alugada por R$ 3.500,00 mensais para a Clínica Bate Coração. Se a taxa de melhor aplicação no mercado financeiro paga juros de 1,75% *am*, qual seria o provável preço do imóvel?

7) Um empresário adquiriu um galpão por R$ 250.000,00, alugando-o por R$ 8.000,00 ao mês. Determinar a taxa de juros mensal considerada para esta operação.

8) Uma pessoa adquiriu um apartamento por R$ 120.000,00. Por quanto deverá alugá-lo mensalmente para receber o equivalente a uma aplicação no mercado financeiro de 1,5% *am*?

Cálculo do valor presente de uma renda variável

Uma renda é chamada variável quando os termos não são iguais entre si.

O valor presente de uma renda variável é calculado como sendo a soma dos valores presentes de cada um de seus termos, dado pela fórmula:

$$PV = \frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n},$$

onde, PMT_1, PMT_2, ..., PMT_n são os termos da renda variável.

Exemplo 3.22 Um imóvel foi adquirido para ser pago em cinco prestações trimestrais, com os seguintes valores:

Primeiro trimestre: R$ 15.000,00;

Segundo trimestre: R$ 20.000,00;

Terceiro trimestre: R$ 30.000,00;

Quarto trimestre: R$ 25.000,00;

Quinto trimestre: R$ 12.000,00.

Se a taxa de juros para aplicações financeiras vigente no mercado é de 1,25% *am*, determinar o valor do imóvel.

Resolução: dados do problema: $i = 1{,}25\%$ *am* = 0,0125 *am*; $PV = ?$; $PMT_1 = 15.000$, $PMT_2 = 20.000$, $PMT_3 = 25.000$; $PMT_3 = 30.000$; $PMT_4 = 25.000$; $PMT_5 = 12.000$.

Aplicando a fórmula acima, temos:

$$PV = \frac{15.000}{(1+0,0125)^3} + \frac{20.000}{(1+0,0125)^6} + \frac{30.000}{(1+0,0125)^9} + \frac{25.000}{(1+0,0125)^{12}} + \frac{12.000}{(1+0,0125)^{15}} =$$

$$PV = \frac{15.000}{(1,0125)^3} + \frac{20.000}{(1,0125)^6} + \frac{30.000}{(1,0125)^9} + \frac{25.000}{(1,0125)^{12}} + \frac{12.000}{(1,0125)^{15}} =$$

$$PV = \frac{15.000}{1,03797} + \frac{20.000}{1,07738} + \frac{30.000}{1,118229} + \frac{25.000}{1,16075} + \frac{12.000}{1,20483} =$$

PV = 14.451,27 + 18.536,50 + 26.826,62 + 21.537,72 + 9.959,92 =

PV = 91.339,03

Portanto, o valor do imóvel é R$ 91.339,03.

Para resolver este exemplo na HP 12C, digite:

f	*REG*	
15000	*CHS*	*FV*
1.25	*i*	
3	*n*	*PV*
20000	*CHS*	*FV*
6	*n*	*PV* +
30000	*CHS*	*FV*
9	*n*	*PV* +
25000	*CHS*	*FV*
12	*n*	*PV* +
12000	*CHS*	*FV*
15	*n*	*PV* +, aparecendo no visor 91.339,03

Equivalência de fluxos de caixa

A equivalência de fluxos de caixa ocorre quando dois ou mais fluxos de caixa possuem seus valores presentes (PV) calculados a uma mesma taxa de juros, são iguais.

Se os fluxos de caixa tiverem o mesmo valor presente, a uma determinada taxa de juros, então seus valores futuros após n períodos, obtidos com essa mesma taxa de juros, são iguais.

Exemplo 3.23 A loja Topa Tudo financia um carro 0 km em 18 prestações mensais, sendo as nove primeiras no valor de R$ 2.000,00, e as nove últimas, no valor de R$ 3.000,00. Se a taxa de juros da loja Topa Tudo é de 1,5% *am*, e se o cliente solicitar o financiamento em 18 prestações mensais e iguais, determinar o valor da prestação mensal.

Resolução: inicialmente, você calcula o valor presente das nove primeiras prestações no valor de R$ 2.000,00 cada uma e das nove últimas no valor de R$ 3.000,00 cada uma; assim,

$$PV = 2.000 \times \frac{1-(1+0,015)^{-9}}{0,015} + 3.000 \times (1+0,015)^{-9} \times \frac{1-(1+0,015)^{-9}}{0,015} =$$

$$PV = 2.000 \times \frac{1-(1,015)^{-9}}{0,015} + 3.000 \times (1,015)^{-9} \times \frac{1-(1,015)^{-9}}{0,015} =$$

$PV = 2.000 \times 8,3605 + 3.000 \times 0,8746 \times 8,3605 =$

$PV = 16.721 + 21.936,13 = 38.657,13.$

Agora, vamos determinar o fluxo de caixa equivalente das nove primeiras prestações no valor de R$ 2.000,00 e das nove últimas no valor de R$ 3.000,00; temos:

$$PMT = PV \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 38.657,13 \times \frac{0,015}{1-(1+0,015)^{-18}} =$$

$PMT = 8.657,13 \times 0,0638 = 2.466,55$

Portanto, o fluxo de caixa das primeiras prestações no valor de R$ 2.000,00 e das nove últimas no valor de R$ 3.000,00 é equivalente

ao fluxo de caixa das 18 prestações mensais no valor de R$ 2.466,55 à taxa de 1,5% *am*.

Exemplo 3.24 A imobiliária Vento e Sol vende um terreno em cinco prestações trimestrais, nos seguintes valores: primeiro trimestre: R$ 5.000,00; segundo trimestre: R$ 20.000,00; terceiro trimestre: R$ 25.000,00; Quarto trimestre: R$15.000,00 e quinto trimestre: R$ 30.000,00. Sendo a taxa de juros para a melhor aplicação financeira vigente no mercado de 2,5% *am*, determinar o preço à vista do terreno. Se um cliente solicitar pagamento em 24 prestações mensais iguais, qual o valor da prestação?

Resolução: inicialmente, você calcula o valor presente das cinco parcelas trimestrais, à taxa de 2,5% *am*, assim:

$$PV = \frac{5.000}{(1+0,025)^3} + \frac{20.000}{(1+0,025)^6} + \frac{25.000}{(1+0,025)^9} + \frac{15.000}{(1+0,025)^{12}} + \frac{30.000}{(1+0,025)^{15}} =$$

$$PV = \frac{5.000}{(1,025)^3} + \frac{20.000}{(1,025)^6} + \frac{25.000}{(1,025)^9} + \frac{15.000}{(1,025)^{12}} + \frac{30.000}{(1,025)^{15}} =$$

$$PV = \frac{5.000}{1,0769} + \frac{20.000}{1,1597} + \frac{25.000}{1,2489} + \frac{15.000}{1,3449} + \frac{30.000}{1,4483} =$$

PV = 4.642,96 + 17.245,84 + 20.017,62 + 11.153,25 + 20.713,94 =

PV = 73.774,60.

Agora, para calcular o valor da prestação mensal, temos:

$$PMT = 73.774,60 \times \frac{0,025}{1-(1,025)^{-24}} \cong 4.124,94.$$

Portanto, o cliente pagará 24 prestações mensais no valor de R$ 4.124,94.

Exemplo 3.25 Determinar o preço à vista de um bem vendido em seis prestações mensais, sendo a primeira no valor de R$ 800,00, e as demais numa progressão aritmética crescente de razão igual à primeira prestação à taxa de juros de 2,5% *am*, sabendo-se que a primeira prestação será paga daqui a 30 dias. Se um cliente solicitar o pagamento em 12 prestações mensais e iguais, qual o valor da nova prestação mensal?

Resolução: o valor presente de uma série de pagamentos variável em progressão aritmética crescente é dado pela fórmula:

$$PV = \frac{G}{i} \times \left[(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$, onde G é a razão da PA.

Calculando o valor presente do bem, vem:

$$PV = \frac{800}{0,025} \times \left[1,025 \times \frac{1-(1,025)^{-6}}{0,025} - \frac{6}{(1,025)^6} \right].$$

PV ≅ 15.105,51.

Assim, o preço à vista do bem é R$ 15.105,51.

Agora, para calcular o valor da nova prestação mensal, você tem:

$$PMT = 15.105,51 \times \frac{0,025}{1-(1,025)^{-12}} = 1.472,59.$$

Portanto, o valor da nova prestação mensal é R$ 1.472,59.

Exemplo 3.26 Determinar o preço à vista de um bem vendido em seis prestações mensais, sendo a primeira no valor de R$ 4.800,00, e as demais, numa progressão aritmética decrescente de razão igual a R$ 800,00 à taxa de juros de 2,5% *am*, sabendo-se que a primeira prestação será paga daqui a 30 dias. Se um cliente solicitar o pagamento em 12 prestações mensais e iguais, qual o valor da nova prestação mensal?

Resolução: o valor presente de uma série de pagamentos variável em progressão aritmética decrescente é dado pela fórmula:

$$PV = \frac{G}{i} \times \left[n - \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$$, onde G é a razão da PA.

Calculando o valor presente do bem, você tem:

$$PV = \frac{800}{0,025} \times \left[6 - \frac{1-(1,025)^{-6}}{0,025} \right] \Rightarrow PV \cong 15.740,00.$$

Assim, o preço à vista do bem é R$ 15.740,00.

Agora, calculando o valor da nova prestação mensal, temos:

$$PMT = 15.740,00 \times \frac{0,025}{1-(1,025)^{-12}} = 1.534,45.$$

Portanto, o valor da nova prestação mensal é R$ 1.534,45.

Exemplo 3.27 Um empréstimo foi liquidado em sete prestações mensais, sendo as três primeiras no valor de R$ 1.500,00, as duas seguintes, no valor de R$ 2.000,00, a sexta, no valor de R$ 3.000,00, e a sétima, no valor de R$ 3.500,00. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada pela instituição financeira é de 6,5% *am*, calcular o valor do empréstimo.

O fluxo de caixa dessa operação (sob o ponto de vista da instituição financeira) é apresentado na Figura 8:
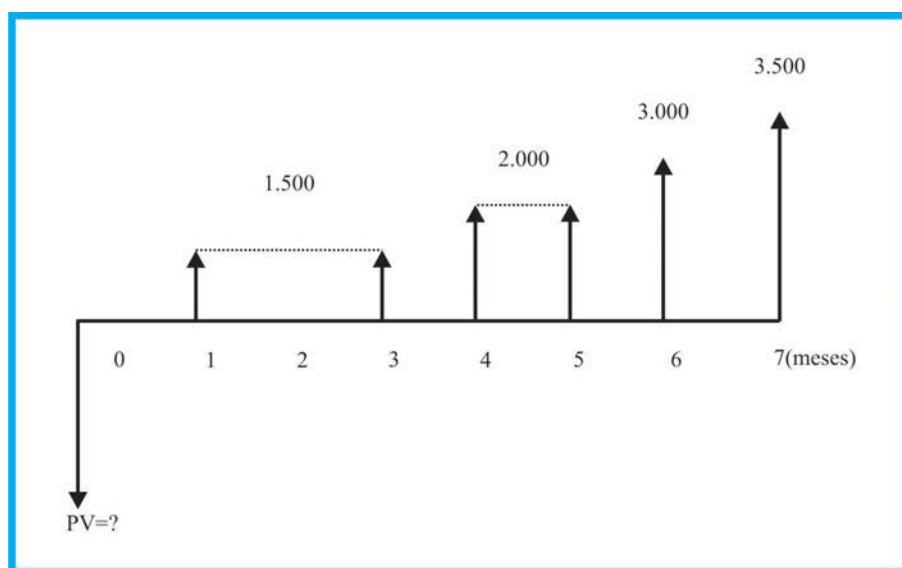
Figura 8

Resolução: Calculando o valor presente do fluxo de caixa acima, temos:

$$PV = 1.500 \times \frac{1-(1,065)^{-3}}{0,065} + \frac{2.000}{(1+0,065)^4} + \frac{2.000}{(1+0,065)^5} + \frac{3.000}{(1+0,065)^6} + \frac{3.500}{(1+0,065)^7} =$$

$$PV = 1.500 \times \frac{1-(1,065)^{-3}}{0,065} + \frac{2.000}{(1,065)^4} + \frac{2.000}{(1,065)^5} + \frac{3.000}{(1,065)^6} + \frac{3.500}{(1,065)^7} =$$

$$PV = 1.500 \times 2{,}6485 + \frac{2.000}{1{,}2865} + \frac{2.000}{1{,}3701} + \frac{3.000}{1{,}4591} + \frac{3.500}{1{,}5540} =$$

PV = 3.972,71 + 1.554,65 + 1.459,76 + 2.056,00 + 2.252,27 =

PV = 11.295,40.

Logo, o valor do empréstimo é R$ 11.295,40.

Se um cliente solicitar a quantia de R$ 11.295,40 para pagamento em 18 prestações mensais iguais à mesma taxa de juros (6,5% *am*), qual o valor da prestação mensal?

Para calcular o valor da nova prestação mensal, temos:

$$PMT = 11.295{,}40 \times \frac{0{,}065}{1-(1{,}065)^{-18}} = 1.082{,}72.$$

Portanto, o valor da nova prestação mensal é R$ 1.082,72.

Agora, procure resolver os exercícios propostos. Esta é uma forma de se certificar de que entendeu o conteúdo abordado. Caso tenha dificuldades, busque auxílio junto ao seu tutor.

Atividades de aprendizagem – 5

1) O sr. Galileu deposita quatro parcelas da seguinte forma:

- R$ 3.000,00 depósito inicial (hoje);
- R$ 4.500,00 um mês após;
- R$ 6.700,00 quatro meses após; e
- R$ 8.500,00 nove meses após, todos os prazos em relação ao primeiro depósito.

Calcule o saldo no momento do último depósito, sabendo que a taxa é de 2,25% *am*.

2) Um equipamento é vendido em 12 prestações mensais, sendo as seis primeiras no valor de R$ 4.500,00, e as seis últimas, no valor de R$ 6.000,00. Se a taxa de juros da operação é de 4,5% *am*, determinar o preço à vista do equipamento.

3) Um terreno é vendido a prazo em 18 prestações mensais iguais de R$ 2.500,00 imediatas postecipadas, mais três prestações de reforço vencíveis em seis, doze e dezoito meses após a compra, cada uma de R$ 6.000,00. Determinar o preço à vista do terreno, se a taxa de juros do financiamento for de 3,5% *am*.

4) Uma máquina permite uma economia de custos de R$ 5.000,00 no primeiro ano e gradativamente crescente em R$ 5.000,00 por ano até o quinto ano de sua vida útil. Considerando uma taxa de juros de 4,5% *am*, determinar o valor atual dessa economia de custos.

5) Uma pessoa aplicou R$ 8.000,00 e, após dois anos e seis meses, recebeu a soma total de R$ 13.462,40. Que depósitos mensais nesse período produziriam a mesma soma, se os juros sobre o saldo credor fossem beneficiados com a mesma taxa de juros da primeira hipótese?

6) Tendo comprado um bem em 18 prestações mensais e iguais de R$ 176,98, o cliente propôs sua substituição para seis prestações trimestrais. Qual será o valor desta nova prestação, se a taxa de juros considerada for de 5% *am*?

7) A empresa Minas Catarina deve R$ 20.000,00 vencíveis de hoje a seis meses, e R$ 30.000,00, vencíveis de hoje a doze meses. A empresa Florescer propôs a seu credor transformar suas dívidas em uma série uniforme de quatro pagamentos postecipados trimestrais, a partir de hoje, a juros compostos de 9% ao trimestre. Calcular o valor do pagamento trimestral.

8) Um bem foi vendido em 18 prestações mensais e iguais de R$ 178,45, sem entrada, numa loja que opera com uma taxa de juros de 5% *am*. Qual seria o valor da prestação, se o bem fosse vendido em nove prestações bimestrais, também sem entrada?

Saiba mais...

- Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade, consulte:

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática Financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.
GUERRA, Fernando. *Matemática Financeira através da HP 12-C*. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.
VERAS, Lilia Ladeira. *Matemática Financeira*. 2. ed. São Paulo: Atlas,1991.

RESUMO

Nesta Unidade, você estudou os diversos tipos de renda (imediatas, antecipadas, diferidas, perpétuas e variáveis), como determinar o valor presente e o montante de cada uma delas (exceto o montante de uma renda perpétua), e aprendeu a operar com fluxos de caixa equivalentes.

A partir de agora, vamos navegar nos sistemas de amortização de empréstimos mais utilizados nos mercados comercial e financeiro no Brasil.

Respostas das atividades de aprendizagem

Atividades de aprendizagem 1

1) R$ 1.392,80.
2) R$ 619,09.
3) 22.
4) R$ 1.057,42.
5) 2,79% *am*.
6) R$ 170.000,00.
7) R$ 1.117,38.

Atividades de aprendizagem 2

1) R$ 12.312,32.
2) R$ 1.152,13.
3) Sete depósitos mensais.
4) R$ 1.464,17.
5) R$ 826,80.
6) 2,15% *am*.

Atividades de aprendizagem 3

1) R$ 709,91.
2) R$ 5.174,55.
3) Deverei aplicar mensalmente R$ 488,94 de acordo com o conceito de renda imediata, e deverei aplicar mensalmente R$ 481,71 de acordo com o conceito de renda antecipada.
4) R$ 1.800,00.
5) R$ 2.815,43.
6) R$ 14.663,42.
7) 14 depósitos mensais.

Atividades de aprendizagem 4

1) R$ 2.072,94.
2) R$ 2.994,68.
3) R$ 2.746,14.
4) R$ 20.059,85.
5) a) R$ 18.744,40; b) R$ 22.680,73.
6) R$ 200.000,00.
7) 3,2% *am*.
8) R$ 1.800,00.

Atividades de aprendizagem 5

1) R$ 25.030,33.
2) R$ 46.974,68.
3) R$ 45.056,07.
4) R$ 63.918,94.
5) R$ 345,04.
6) R$ 557,89.
7) R$ 11.756,06.
8) R$ 365,82.

Ao longo desta Unidade, desenvolvemos importantes considerações sobre os conceitos relacionados com rendas ou série de pagamentos. Importante: não é desejável que você responda ou reflita somente o que está neste livro. Desejamos que você desenvolva opinião crítica a respeito dos assuntos abordados e a exponha aos colegas nos Fóruns de discussão, e também ao elaborar as respostas das Atividades de aprendizagem.